学校编号： 10384　　　　**分类号** ______ **密级** ______
学　　号： 19120081152739　　　　UDC______

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

任意 11 - 可着色纽结存在 6 种颜色的 11-着色投影图

ANY 11-COLORABLE KNOT EXISTS A 11-COLORABLE DIAGRAM WITH 6 COLORS

程 文 芳

指导教师姓名：　金贤安　教授
专 业 名 称：　概率与数理统计

论文提交日期：　2013　年　5　月
论文答辩日期：　2013　年　6　月
学位授予日期：　2013　年　6　月

答辩委员会主席：______
评　　阅　　人：______

2013 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　　），在　　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　　），适用本授权书。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目 录

Contents

摘 要

纽结着色（也称为 Fox 着色）大约在上世纪 60 年代提出的。近年来，p - 可着色纽结的最小色数的概念由 Harary 、 Kauffman 等学者引入。 2007 年， Kauffman 给出了部分环面纽结 $T(2,n)$ 的最小色数。 2009 年， Satoh 证明了 5 - 可着色纽结的最小色数为 4 。 2010 年， Kanako 证明了 7 - 可着色纽结的最小色数也为 4 。本文延续上述研究，证明了 11 - 可着色纽结的最小色数是 5 或 6 。

关键词： 纽结投影图； 11 - 可着色； 最小色数

Abstract

Knot colorings (also called Fox colorings) were raised about 1960s. In recent years, the conception of the minimum number of colors for p-colorable knots was introduced by Harary, Kauffman, etc. In 2007, Kauffman gave the minimal number of some kinds of torus knots $\mathcal{T}(2, n)$. In 2009, Satoh proved that the minimal number of 5 -colorable knots is 4. In 2010, Kanako proved that the minimal number of 7 -colorable knots is also 4. In this dissertation we continue the research above, and prove the minimal number of 11 -colorable knots is 5 or 6.

Key words: Knot program ; 11-colorable ; the minimal number of colors ;

第 1 章　引言

1.1　若干概念

纽结是三维空间中的简单闭折线，选取适当的投影方向，总可以使它在平面上的投影的自交点都只是有限个二重交叉点；以线的虚实表现交叉的情况，就得到纽结的投影图。为美观起见，将纽结画作曲线，可想象为用数量具大的线段构成的闭折线。任意纽结投影图 D 都可看成是不相交弧的组合。

定义 1.1.1 对奇素数 p，我们考虑对纽结投影图 D 的每个弧指派一个 $\mathbb{Z}_p$=$\{0,1,...,p-1\}$ 中的元素，称为颜色。对任意交叉点，设其两个下弧颜色为 a 和 c 色，上弧颜色为 b 色，满足 a+c=2b，则称这样的指派为 D 的一种 p - 着色。

当 p=3 时，定义 1.1.1 的条件意味着在每个交叉点或者使用一种颜色，或者使用三种颜色，如图 1.1.1 所示。

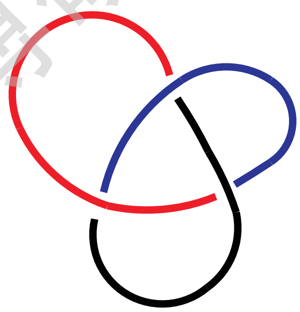


图 1.1.1　3 - 着色投影图

定义 1.1.2 称投影图 D 的一个 p - 着色是平凡的，若纽结投影图 D 的所有弧着同样的颜色，否则是非平凡的。一个纽结若存在一个可非平凡 p - 着色的投影图，则称之为 p - 可着色纽结。

图 1.1.2 和图 1.1.3 分别为两个不同纽结的 5 - 着色投影图。

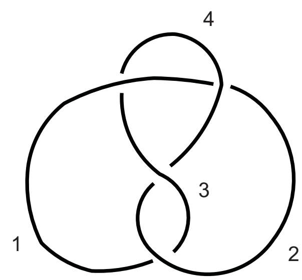


图 1.1.2 8 字结的 5 - 着色投影图

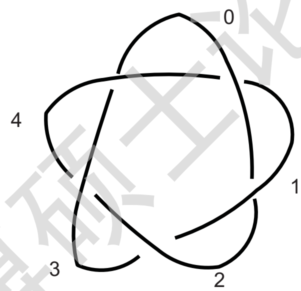


图 1.1.3 五星结的 5 - 着色投影图

若一个纽结经过绳圈移位变形变成另一个，则称这两个纽结是等价的，*Reidemeister* 指出，纽结的等价本质上是由纽结投影图的三种基本变换来刻划的，这三种基本变换我们称为 R1， R2， R3（如图 1.1.4 所示）。

定理 1.1.3 [9] 若 K 是 p - 可着色纽结，则 K 的任意投影图均为 p - 可着色。

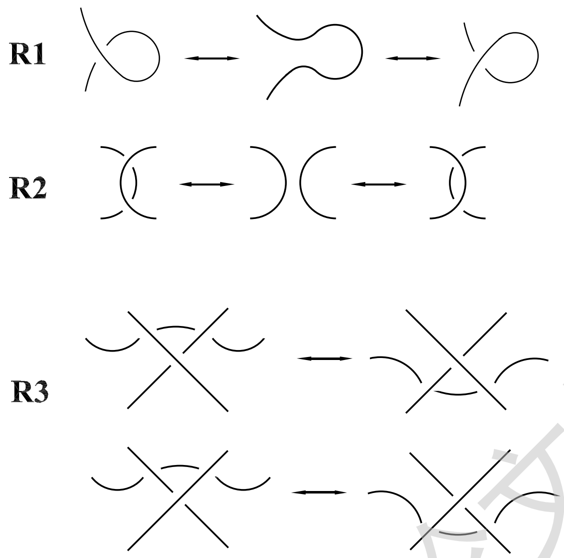


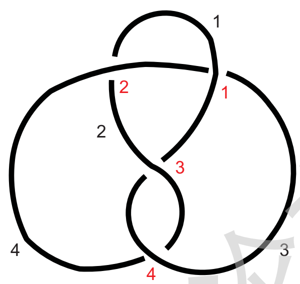
图 1.1.4. Reidemeister 变换

文献 [9] 证明了在 *Reidemeister* 变换下，纽结投影图的 p - 可着色性质不变，即若 D 为 K 的纽结投影图， D 经过 *Reidemeister* 变换为 D'，则
（ 1 ）若 D 是 p - 可着色的，则 D' 也是 p - 可着色的；
（ 2 ）若 D 是非平凡 p - 可着色的，则 D' 也是非平凡 p - 可着色的。

任意纽结是否一定对某个奇素数 p 而言是 p - 可着色的？下述的定理回答了这个问题。

定义 1.1.4 对纽结 K 的一个投影图的每条弧及每个交叉点标上数字，定义关联交叉矩阵 C， C 的第 i 行第 j 列的值为 1，若在交叉点 i，弧 j 是下线弧； C 的第 i 行第 j 列的值为 -2，若在交叉点 i，弧 j 是上线弧；任意删除 C 的一行和一列得到的矩阵的行列式都相同，我们记这个行列式为 det(K)。

例如图 1.1.5 中，对 8 字结一个投影图的每条弧和每个交叉点标上数字，以颜色区分，得到矩阵 C ，任意删除 C 的一行一列，得到的行列式相同，如删除 C 第一行第二列得到的矩阵 C_1 及删除 C 最后一行最后一列得到的矩阵 C_2 。



$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

图 1.1.5. 8 字结投影图与其关联交叉矩阵 C

$$\mathbf{C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\mathbf{C_2} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

det(K) 是 K 的一个不变量 [1] 。

定理 1.1.5 [9] 若 p 为素数，则一个纽结 K 为 p - 可着色的当且仅当 p 可整除 det(K) 。

为研究方便，我们后面的研究对象均为可被 p 整除 det(K) 的纽结，即 p - 可着色纽结。

det(K) 在交错纽结中，可得到更进一步的结论，见下述定理 1.1.8 。

定义 1.1.6 投影图的一条边称为交错边，若这条边在两个端点处一个是从上面穿过的，一个是从下面穿过的。（如图 1.1.6 所示）若纽结 K 的一个投影图 D ，它的每一条边都是交错边，则称 D 为交错投影图。具有交错投影图的纽结称为交错纽结。

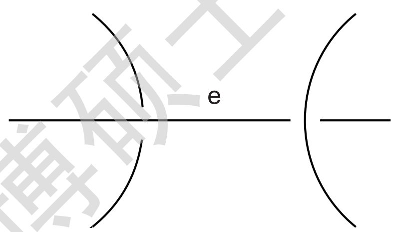


图 1.1.6. e 为交错边

定义 1.1.7 对投影图弧线所划分的区域着以黑白两色，满足无限区域为白色且有公共边的两个区域着不同颜色，所构成的图为投影图的棋盘图。以黑色区域作为顶点，两区域之间的交叉点作为两个顶点间的边，所构成的图即为棋盘图的平图。

实际上，平图和纽结投影图之间具有一一对应关系。如图 1.1.7 和图 1.1.8 所示。

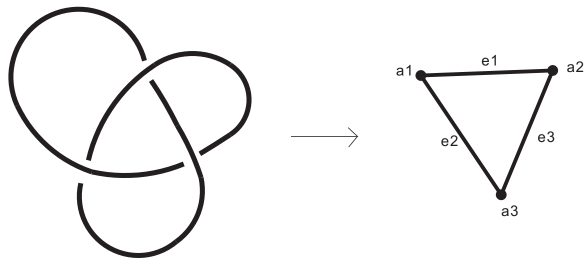


图 1.1.7. 三叶结投影图与其平图

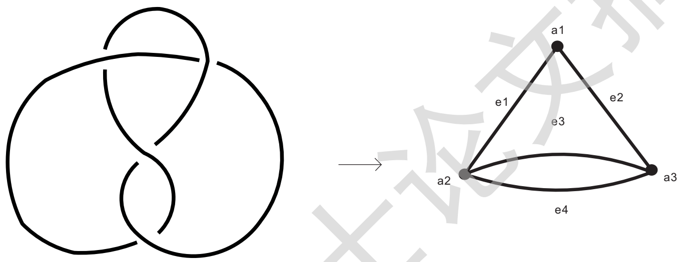


图 1.1.8. 八字结投影图与其平图

定理 1.1.8 [10] 若 D 是交错投影图，则 $det(D) = \tau(G)$ ，其中 G 是对应 D 的一个平图， $\tau(G)$ 是 G 的生成树数目。

如图 1.1.9 ，八字结的平图的生成树数目为 5 ，又由图 1.1.5 到八字结的投影图 D 的 det(D)=5 ，与其平图的生成树数目相同。

下面我们介绍最小色数的概念， $Kauffman$ 先是引入了 χ 色的概念，即满足纽结是 χ - 可着色的最小的奇素数 χ ，而后引入最小色数的概念，如下定义。

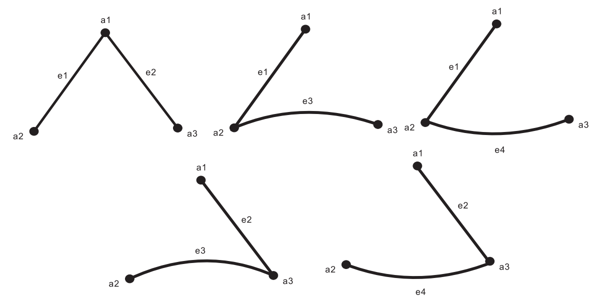


图 1.1.9. 八字结投影图的平图的生成树

定义 1.1.9 纽结 K 是 χ 色的，若 K 是 χ - 可着色的且 χ 是最小的奇素数。

定义 1.1.10 对一个 p - 可着色纽结，其 p - 着色投影图不一定着以 $\mathbb{Z}_p$ 的所有颜色。在 p - 可着色纽结 K 的所有非平凡的 p - 着色投影图中，着以最少颜色的投影图的着色数，称之为 p - 可着色纽结 K 的最小色数，记为 $C_p(K)$ 。

显然， $C_p(K)$ 是纽结的一个不变量。

例如图 1.1.2 ， 8 字结的非平凡 5- 着色投影图只用了 4 种颜色；再如图 1.1.5 ，五星结存在非平凡 5- 着色投影图只用了 4 种颜色。

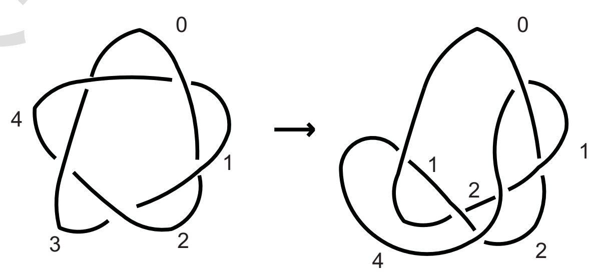


图 1.1.10. 通过 Reidemeister 变换降低颜色数目

1.2 已知结果

引理 1.2.1 ([1]) 若 $p > 3$，则投影图 D 的任意非平凡 p - 着色至少需要 4 种颜色。

引理 1.2.2 ([3]) 任意 5 - 可着色的纽结都有一个非平凡 5- 色投影图，该投影图上只有 4 种颜色。

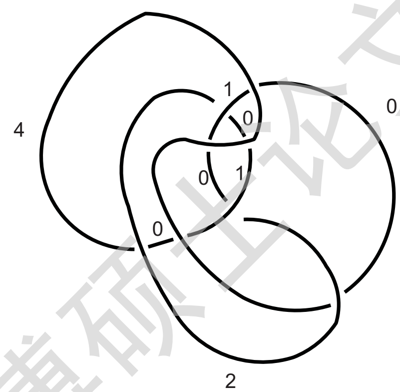


图 1.2.1. 7 - 可着色纽结投影图着 4 种颜色

推论 1.2.3 $C_5(K) = 4$。

例如，图 1.1.2 的 8 字结的 5 - 着色投影图最小色数为 4。

引理 1.2.4 ([4]) 任意 7 - 可着色的纽结都有一个非平凡的 7- 色投影图，该投影图上只有 4 种颜色。

推论 1.2.5 $C_7(K) = 4$。

例如，图 1.2.1 的纽结 5_2 的 7 - 着色投影图最小色数也为 4。

1.3 本文结果

设 K 是一个 p - 可着色的纽结， D 是 K 的的一个非平凡 p - 着色投影图，即存在一指派从 $\mathbb{Z}_p$=$\{0, 1, ..., p-1\}$ 的元素至 D 的每条弧。若 D 的交叉点上线弧的颜色为 b ，下线弧的颜色分别为 a 和 c ，我们称 D 的交叉点的着色为 $\{a\,|b|\,c\}$ 或 $\{c\,|b|\,a\}$ 。

引理 1.3.1 若 $p > 7$ ，则 D 的任意非平凡 p - 着色至少需要 5 种颜色着色，即 $C_p(K) \geq 5$ 。

证明：由引理 1.2.1 ， $C_p(K) \geq 4$ ，若要证 $C_p(K) \geq 5$ ，只需 $C_p(K)$ 不等于 4 。假设 D 可被 a,b,c,c 4 种颜色着色，满足 a,b,c,d 互不相同。则 D 必有一对交叉点为 $\{a\,|b|\,c\}$ 和 $\{a\,|c|\,d\}$ ，或 $\{a\,|b|\,c\}$ 和 $\{b\,|c|\,d\}$ ，或 $\{a\,|b|\,c\}$ 和 $\{c\,|d|\,b\}$ 。假设 D 的这对交叉点为 $\{a\,|b|\,c\}$ 和 $\{a\,|c|\,d\}$, 对于其他三种情况同理可证, 则必存在第三个交叉点使得 d 为上线弧。事实上若 D 没有第三个交叉点使得 d 为上线弧，则或者 D 只有两个交叉点或者 D 不止两个交叉点但 d 只能为下线弧， D 只有两个交叉点的情况与 a,b,c,d 互不相同矛盾；若 D 不止两个交叉点但 d 只能为下线弧，则或者 d 至少与 a,b,c 其中之一相同，或者 d 的弧相接成为与其他弧不相交的圈，这与 D 是纽结矛盾。所以 D 必存在第三个交叉点使得 d 为上线弧。这样，第三个交叉点可能为 $\{a\,|d|\,b\}$ ，或 $\{a\,|d|\,c\}$ ，或 $\{b\,|d|\,c\}$ ，假设第三个交叉点为 $\{a\,|d|\,b\}$ ，对于其他两种情况同理可证。则三个交叉点满足等式 a+c=2b ， a+d=2c 和 a+b=2c ，合并三个等式得到 7(c-a)=0 ，与 $p > 7$ 和 $c \neq a$ 矛盾，引理 1.3.1 得证。

定理 1.3.2 任意 11 - 可着色纽结都存在一个非平凡投影图且该投影图上只有 6 种颜色。由本文第 2 章证明可得。

推论 1.3.3 $5 \leq C_{11}(K) \leq 6$ 。

由引理 1.3.1 和定理 1.3.2 可得。